INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

Session de 1988 **MATHÉMATIQUES**

Durée : 4 heures
Option Générale - Coefficient : 4

EXERCICE 1 *(6 points)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \longmapsto x^n (1-x)^n$$

1°) Montrer que toutes les dérivées de f_n, jusqu'à la (n-1)-ième incluse, sont nulles aux points 0 et 1.

2°) Pour x réel, on pose :

- $L_0(x) = 1$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} f_n^{(n)}(x)$

(où $f_n^{(n)}$ désigne la fonction dérivée n-ième de f_n)

i) Montrer que L_n appartient à E_n et préciser son degré ainsi que les valeurs des coefficients des termes de plus haut et de plus bas degré de L_n.

ii) Déterminer L_1, L_2, L_3

3°) Soit P une fonction polynome de degré strictement inférieur à n, montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que l'on a :

$$\int_0^1 P(t)\, L_n(t)\, dt = 0$$

4°) i) Pour $p,q \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de : $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx$

ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de : $\int_0^1 f_n(x)\, dx$

iii) En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}$, de : $\int_0^1 L_n(t).\, L_n(t)\, dt$

5°) Montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E_3 et déterminer la matrice de passage de la base canonique de E_3 à la base (L_0, L_1, L_2, L_3), ainsi que son inverse.

EXERCICE 2 *(4 points)*

1°) Soit M un nombre réel strictement positif et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 ; \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{M + u_n}$$

i) Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de M.

ii) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 + 2M.

iii) Exprimer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en fonction de M.

2°) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$v_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n}}}}$$ (n radicaux superposés)

i) Quel est le sens de variation de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

ii) On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, montrer que dans ce cas la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

iii) On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\text{Log}(\text{Log}(a_n))}{n} < \text{Log } 2$

(où Log désigne la fonction « logarithme népérien »)

Montrer que, dans ce cas, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

PROBLEME *(10 points)*

Un papetier vend un produit correcteur, ce produit lui est livré en boîtes, chaque boîte contenant un flacon de produit effaceur et un flacon de produit diluant. A la demande de sa clientèle, il accepte de vendre ces deux produits séparément. Chaque client demande soit le produit effaceur (avec la probabilité p, $p \in]0,1[$), soit le produit diluant (avec la probabilité $q = 1 - p$), les demandes des clients étant indépendantes les unes des autres.

1°) Un jour donné, quatre clients demandent l'un de ces produits, à l'ouverture de son magasin le papetier ne possédant pas de boîte entamée.

Soit X le nombre aléatoire de boîtes ouvertes ce jour par le papetier.

i) Déterminer la loi de X

ii) Calculer, en fonction de p, l'espérance de X. Pour quelle valeur de p cette espérance est-elle minimale ? Quelle est la valeur de ce minimum ?

2°) On suppose dans cette question que l'on a : $p = \frac{1}{2}$ et que le commerçant sait que le mois suivant exactement 2n clients demanderont l'un des deux produits. On suppose que le premier jour le papetier ne possède pas de boîte entamée et on note X_n le nombre aléatoire de boîtes que le papetier devra ouvrir au cours de ce mois.

i) Quelles sont les valeurs que peut prendre X_n ? Déterminer la loi de X_n.

ii) Calculer l'espérance de X_n.

iii) Chaque boîte entamée est facturée 20 F au papetier par son fournisseur à la fin du mois. On note : $10.(1 + x_n)$ le prix de vente de chaque flacon. Quelle doit être la valeur de x_n pour que le commerçant espère ne pas perdre d'argent à la fin du mois ? Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

3°) Dans cette question on suppose que le commerçant possède au départ un stock non renouvelable de n boîtes. Il vend des flacons jusqu'à l'épuisement de l'un des deux produits et on note Y_n le nombre aléatoire de flacons de l'autre produit restant à ce moment dans son magasin.

i) Quelles sont les valeurs que peut prendre Y_n ?

ii) Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$, calculer l'espérance de Y_n.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail